

## 3Dプリント（付加製造技術）による仕口を用いたセルフビルド実験住宅 その2 幾何学システムの安定性の検討

正会員 ○山口 大翔\*  
同 今井 公太郎\*\*  
同 伊東 優\*\*\*  
同 国枝 歓\*\*\*

動的幾何学                      リンケージ                      パラメトリックデザイン  
モジュール                      付加製造技術                      3Dプリント

### 1. 目的

本稿では、正四面体と正四角錐体、正五角錐体で混成されたフレームの位相性に着目し、セルフビルド実験住宅で用いる幾何学システムについての数理モデルの構築と構造に関する安定性の検討を目的とする。

### 2. 幾何学システム

#### 2-1. 幾何学システムの特徴

セルフビルド実験住宅の開発に先立ち、本研究で用いる幾何学システムを考案した。このシステムは、辺の長さが全て等しい正四面体と正四角錐体、正五角錐体を組み合わせたものである。各多角錐体の底面体である正四角形と正五角形が3次元上の位相性を有することで、フレームを混成して形成できる全体の形状には広い選択肢と自由度が生まれる。

#### 2-2. フレームの変形

正四面体は1種類のトポロジーしか存在しないリジッドなフレームである。一方で、正四角錐体、正五角錐体について、各辺の長さが一定という条件を満たす位相同型は底面体の連続した変形を考慮すると無数に存在する。(図1,2)各辺の長さを $l$ 、 $Ta, Pa, Ha$ を原点、 $Tb, Pb, Hb$ をY軸上の点 $(0, l, 0)$ とおく。フレームの連続的な変形は、各頂点の3次元ベクトルで示すことができる。

正四面体の変形は、辺 $TaTb$ を回転軸とした変数 $\theta_T$ についての次式で表される。なお、本稿では変数の境界条件については簡略化のため明記しない。

$$Tc = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} l \cos \theta_T, \frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} l \sin \theta_T \right)$$

$$Td = \left( \frac{\sqrt{3}}{6} l (\cos \theta_T - 2\sqrt{2} \sin \theta_T), \frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} l (\sin \theta_T + 2\sqrt{2} \cos \theta_T) \right)$$

正四角錐体の変形は、辺 $PaPe$ を軸としたロドリゲスの回転行列 $R_{\vec{Pe}}(\varphi_P)$ と立体が平面 $PbPdPe$ について対称であることを用いて、 $\theta_P$ と $\varphi_P$ を変数とした次式で表される。

$$Pe = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} l \cos \theta_P, \frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} l \sin \theta_P \right)$$

$$Pd = R_{\vec{Pe}}(\varphi_P) \vec{Pb}$$

$$Pc = 2k(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$((\alpha, \beta, \gamma) = \vec{PePd} \times \vec{PePb},$$

$$k = \frac{\alpha\sqrt{3}l \cos \theta_P + \beta l + \gamma\sqrt{3}l \sin \theta_P}{2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)})$$

正五角錐体の変形は、辺 $HaHc$ を軸としたロドリゲスの回転行列 $R_{\vec{Hc}}(\varphi_H)$ を用いて $\theta_H$ と $\varphi_H$ 、 $\lambda_H$ を変数とした次式で表される。なお、点 $He$ は点 $Hd, He, Hf$ が同一直線上に並ぶ場合を除いて、変数 $\theta_H, \varphi_H, \lambda_H$ の組み合わせ1つに対して2つの座標が存在する。(図2上の点 $He$ と $He'$ )

$$Hc = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} l \cos \theta_H, \frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} l \sin \theta_H \right)$$

$$Hd = R_{\vec{Hc}}(\varphi_H) \vec{Hb}$$

$$Hf = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} l \cos \lambda_H, \frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} l \sin \lambda_H \right)$$

$$|\vec{He}| = |\vec{HeHd}| = |\vec{HeHf}|$$

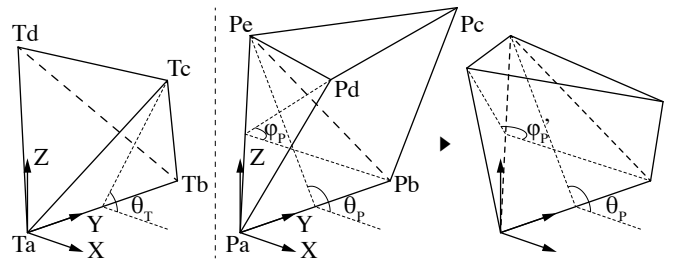


図1 正四面体と正四角錐体の変形

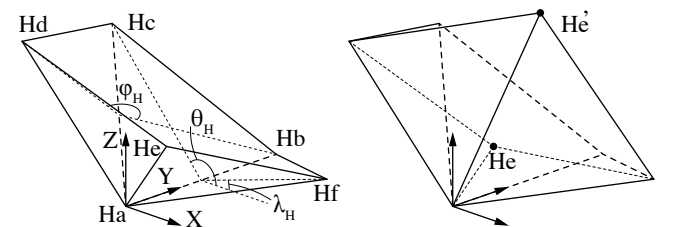


図2 正五角錐体の変形と2種類の点He座標

#### 2-3. フレーム同士の関係

フレームを混成した場合、辺を共有しているフレーム同士の関係はローカル座標からワールド座標への変換行列 $M$ で定義できる。ここに直交座標軸の単位ベクトルを $X, Y, Z$ 、原点と対象点のワールド座標を $C$ と $Q$ 、共有辺に接する三角形面法の単位法線ベクトルを $U$ とおく。フレームのワールド座標 $P$ はローカル座標 $V$ で次のように表される。

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_x & Y_x & Z_x & C_x \\ X_y & Y_y & Z_y & C_y \\ X_z & Y_z & Z_z & C_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\vec{V} = \frac{\vec{Q} - \vec{C}}{|\vec{Q} - \vec{C}|}, \quad \vec{X} = \vec{V} \times \vec{U}, \quad \vec{Z} = \vec{X} \times \vec{V})$$

変換行列  $M$  を用いて 2-2 節で示したローカル座標上のフレームの動きをワールド座標に変換することで、フレーム全体の変形の軌跡を求めることができる。下図の場合、ローカル座標  $X_{L1}, Y_{L1}, Z_{L1}$  における点  $g, e, f$  の座標はそれぞれ 2-2 節における点  $Pe, Pd, Pc$  と同値である。したがって、ワールド座標  $X_W, Y_W, Z_W$  における点  $g, e, f$  は点  $Pe, Pd, Pc$  に変換行列  $M$  を掛け合わせることで求まる。この時  $C$  は  $\vec{c}$ 、 $Q$  は  $\vec{b}$ 、 $U$  は  $\vec{cb}$  と  $\vec{cd}$  の外積を正規化した  $U_1$  である。(図 3)

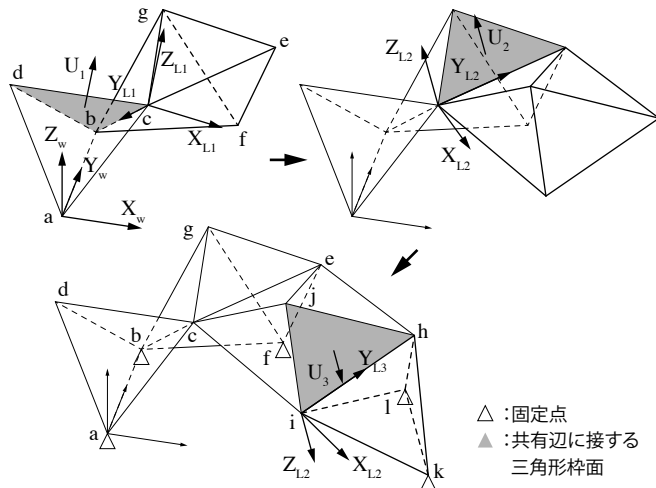


図 3 各フレームのローカル座標

### 3. 構造的な安定性

#### 3-1. フレームの安定条件

正四面体、正四角錐体、正五角錐体は辺を軸とした回転について 1 次、2 次、3 次の自由度を持ち、フレーム全体の変形はこれらの自由度の総和に則る。よって、本研究の幾何学システムはフレームの種類と数に基づいた  $n$  次自由度を持つ 3 次元リンクエッジのグラフ構造と考えることができる。不安定、静定、不静定に関する構造特性はリンクエッジのグラフ構造と固定点の配置に依存し、その構造判定はリンクエッジの剛性な配置を解くことで明らかになる。正四面体と正四角錐体を 1 つずつ組み合わせた構造例で変形の自由度を拘束する三角形数が固定点の配置によって変わること示す。下図右は点  $a, b$  を拘束する三角形がないため、不安定な構造となる。(図 4)

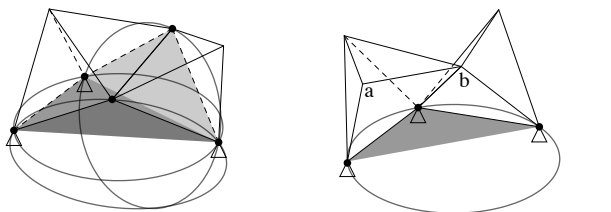


図 4 安定な構造 (左) と不安定な構造 (右)

フレームのグラフ構造と固定点と同じ条件のとき、フレームの変形では全体の安定性は変化せず、変形前後の軌跡を含めた領域的な範囲で安定の可否が評価できる。

#### 3-2. 崩れが生じる条件

しかし、安定な構造でも特異的に不安定となる条件が存在し、下図の場合では各固定点が同一直線上に並ぶとフレーム全体が回転し不安定になる。この時、自由度を拘束する三角形外接円  $A$  の直径は無限大に発散する (図 5)

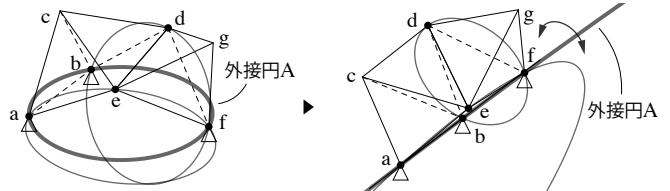


図 5 安定な構造 (左) が不安定な構造 (右) になる場合

#### 3-3. 接地点位置の導出

図 3 で示した正四面体と正四角錐体を 2 つずつ組み合わせたフレームに対し、3 次元曲面に沿った接地点位置の最適化計算を行った<sup>[1]</sup>。変形パターンのパレート解群を 6 変数のパラメータを示す灰色の折れ線グラフで表すと、この曲面に適した形状は、グラフ上の黒線にそれぞれ対応した下図の 3 パターンが考えられる。(図 6) このシステムの応用を想定すると、平坦でない地形や狭小敷地に対して土地条件に沿った建築の形状決定プロセスや設計条件の整理を補助する UI としての活用が期待される。

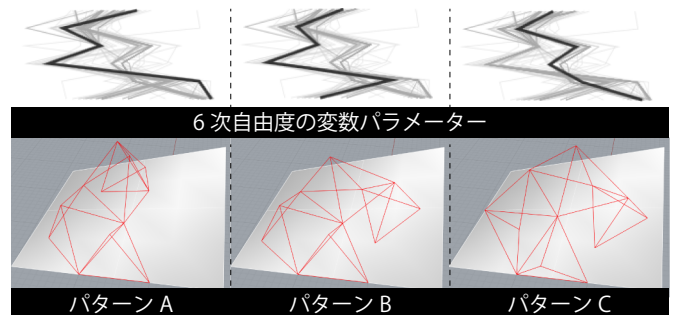


図 6 アルゴリズムで導出されたフレームパターン

### 4. まとめ

本研究では、位相性を考慮することで形状の柔軟性に富んだモジュールシステムの幾何学的特性を明らかにし、敷地の地形条件に従った建築形状の決定プロセスへの応用を試みた。今後は荷重や結合部の納まり等の設計上の制約を境界条件に加えることで、実用化に向けたシステムの発展を考えている。本研究の一部は JSPS 科研費基盤研究 (B) 19H02312 の助成を受けたものです。

#### 【注釈】

[1] 計算には 3 次元モデリングツール Rhinoceros と Octopus を使用した。Octopus は多目的関数に対して最適解を求める Grasshopper の遺伝的アルゴリズムプラグインである。シミュレーションは反復回数 100 回で行った。

\* 東京大学大学院工学系研究科 修士課程  
 \*\* 東京大学生産技術研究所 教授・博士 (工学)  
 \*\*\* 東京大学生産技術研究所 特任研究員・修士 (工学)

\* Graduate Student, Graduate School of Eng., The Univ. of Tokyo  
 \*\* Professor, Institute of Industrial Science, The Univ. of Tokyo, Dr. Eng.  
 \*\*\* Specially Appointed Researcher, Institute of Industrial Science, The Univ. of Tokyo, M. Eng.